

**ПРОГНОЗУВАННЯ ЗА МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ  
НЕСУЧОЇ СПРОМОЖНОСТІ БУРОІН'ЄКЦІЙНИХ ПАЛІ**Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна  
Парибське відділення інженерії Цзюцюань, Китай

У статті розглядається метод прогнозування несучої здатності бурюін'єкційних палі, виготовлених за технологією "Солетанж", з використанням методу граничних елементів (МГЕ). Зважаючи на те, що бурюін'єкційні палі ущільнюють ґрунт під час їхнього виготовлення, дослідження напружено-деформованого стану (НДС) таких конструкцій є актуальним.

Автори провели математичне моделювання процесу деформації бурюін'єкційної палі в лесових суглинках, використовуючи рішення пружньо-пластичної задачі механіки ґрунтів. Моделювання виконувалося із залученням інтегрального рівняння, що дозволяє зменшити розмірність задачі. Основним інструментом для розрахунків стали розв'язки Р. Мінділіна, які найбільш відповідали фізичній суті задачі.

У статті також було використано неасоційований закон пластичної течії для описання пластичних деформацій та критерій текучості Мізеса-Шлейхера-Боткіна. Авторі представили детальний покроковий алгоритм навантаження та розв'язку задачі, враховуючи середньозважені фізико-геологічні характеристики ґрунту.

Результати моделювання були порівняні з експериментальними даними, що підтвердило достовірність запропонованої математичної моделі.

Це дослідження має важливе значення для проєктування палевих фундаментів, особливо в умовах, коли необхідно враховувати складні геотехнічні умови та нелінійні властивості ґрунтів.

**Ключові слова:** бурюін'єкційні палі, метод граничних елементів (МГЕ), несуча здатність, напружено-деформований стан (НДС), пружньо-пластична задача, математичне моделювання, технологія "Солетанж", пластичні деформації, критерій текучості, геотехнічні умови.

**Вступ**

Альтернативою бурових палей сьогодення є бурюін'єкційні палі, які влаштовуються за технологією "Солетанж". Свердловину бурять шнеком діаметром 0.3 – 0.6 м, який обладнаний порожнистими штангами, що виключає необхідність додаткового закріплення стінок свердловини і через які в свердловину подається бетон. При підйомі шнеку бетон отримує додатковий тиск і тим самим ущільнює контактний ґрунт навколо бурюін'єкційних палей, які дозволяють проводити комплексну систему контролю за їх якістю. Оскільки процес виготовлення бурюін'єкційної палі забезпечує ефект ущільнення ґрунту, це дає можливість підняття їх несучої здатності. Тому напрацювання методики визначення напружено-деформованого стану (НДС) бурюін'єкційних палей є актуальним для сьогодення.

**Постановка задачі, визначальні співвідношення**

В статті проведено математичне моделювання процесу деформування бурюін'єкційної палі довжиною  $L = 8$  м. в лесових суглинках з використанням рішень пружньо-пластичної задачі механіки ґрунтів, яка реалізована з залученням числового методу граничних елементів (МГЕ). Як відомо, розрахунок по деформаціях – це скорочення до можливих границь величин переміщень, які зпрогнозовані в нормативних документах, а міцність дисперсних основ є результатом прояви осереднених властивостей ґрунту в активній зоні (зоні впливу додаткового тиску від споруди на ґрунтову основу).

Математична модель представлена у вигляді інтегрального рівняння (1), до якого

К. Бреббія [1, 2] звели розв'язок краєвої задачі – розрахункової системи із 15 диференційних рівнянь в частинних похідних. Подання краєвої задачі еквівалентним інтегральним рівнянням МГЕ дозволяє на одиницю понизити розмірність задачі, оскільки тривимірну задачу МГЕ переводить в двовимірну [1, 6]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + b_j &= 0 \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x), \quad (1)$$

де  $\sigma_{ij,j} + b_j = 0$  – статичні рівняння рівноваги;

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  – геометричні рівняння;

$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$  – фізичні рівняння середовища.

При обчисленні крайових задач за МГЕ необхідно використання фундаментального розв'язку. Використано розв'язки Р. Міндліна (для вертикальної сили, прикладеної в середині пружного півпростору). За сингулярні рішення, позначені \* в рівнянні (1), взято розв'язки

Р. Міндліна для півплощини [1, 2, 6] ( $U^*(\xi, x), q^*(\xi, x)$ ), які в найбільшій мірі відповідають фізичній суті задачі, адже навантаження від наземної частини споруди фундаментами передаються на ґрунт на деякій глибині.

Непружна поведінка ґрунту описувалась наступним інтегральним рівнянням стану [1, 6]:

$$c_{ij} \cdot u_j + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{\sigma}^* \dot{\varepsilon}_{jk}^p d\Omega, \quad (2)$$

де,  $u$  – заданий вектор переміщень на контактні границі фундаментної конструкції;  $p$  – шуканий вектор напружень на границі;

В якості вагових функцій прийнято розв'язки Р. Міндліна [2]  $u^*, p^*, \dot{\sigma}^*$  - (ядра граничного рівняння чи функції впливу МГЕ). Саме вони обертають в нуль інтеграл по області і тим самим зводять задачу лише до визначення граничних функцій, понижуючи порядок задачі на одиницю.

Вектор повних деформацій складався із суми пружних, пластичних деформацій та приростів пластичних деформацій на кожному кроці навантаження:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (3)$$

Оскільки пластичні деформації пов'язані з явищем зсуву, вектор приростів пластичних деформацій складався із шарової та девіаторної частин:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_{шарове}^p + d\varepsilon_{девіаторне}^p \quad (4)$$

В розрахунку багатофазове геологічне середовище активної зони палі на будівельному майданчику експериментального дослідження буроін'єкційної палі [3] було замінено середньозваженими фізико-геологічними характеристиками шарів ґрунту активної зони. Значення восьми середньозважених вхідних характеристик ґрунтів, які враховувались в розрахунку в статті:

- модуль деформації ґрунту  $E = 5,63$  МПа;
- коефіцієнт поперечного розширення лесових суглинків  $\nu = 0,35$ ;
- вхідна питома вага ґрунту  $\rho = 18,67$  кН/м<sup>3</sup>;
- мінімальне значення щільності ґрунту  $\rho_{\min} = 16,2$  кН/м<sup>3</sup>;
- максимальне значення щільності  $\rho_{\max} = 21$  кН/м<sup>3</sup>;
- питома зчеплення ґрунту  $C = 19,73$  Кпа;
- кут внутрішнього тертя  $\varphi = 0,333$  радіан;
- параметр переходу від конуса до циліндра в поверхні текучості на октаедричній площині в критерії текучості Мізеса-Шлейхера-Боткіна  $p_0 = -1700$  кПа..

Решта 19 вхідних параметрів характеризували геометрію та дискретизацію контактної зони палі та активної зони.

Діаметр буроін'єкційної палі після її формування склав 0,42 м [3]. Для реалізації на ЕОМ розрахункова схема буроін'єкційної палі та активної зони ґрунту дискретизувались, тобто приводились до скінченомірної. Основні етапи числового алгоритму:

Контактну з ґрунтом області фундаментної конструкції (бокову поверхню палі та вістря) дискретизували 20 граничних елементів;

ґрунт навколо палі, в якому очікується поява пластичних деформацій (активна зона), дискретизували 196 трикутних осередків;

По кожному граничному елементу та трикутному осередку проводилась кусочно-лінійна апроксимація напружень;

На основі відомих функцій впливу (розв'язків Р. Міндліна для півплощини) формувались матриці впливу МГЕ шляхом підстановки в інтегральні співвідношення напружено-деформованого стану текучих точок та визначення інтегралів за допомогою квадратурних формул Гаусса та Хаммера;

Розв'язання розрахункової СЛАР відносно значень шуканих напружень в центрах граничних елементів та визначення відповідної несучої здатності палі.

Оскільки дисперсним ґрунтам властива пластичність, а це явище характеризується історією навантаження, тому виникає потреба очислювати приріст пластичних деформацій під час крокового навантаження, а потім знаходити сумарні деформації шляхом додавання (3). Пружно-пластичний підхід засновується на роздільному описанні пружних і пластичних деформацій різними фізичними залежностями.

В роботі для описання пластичних деформацій використано неасоційований закон пластичної течії:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{dF}{d\sigma_{ij}}, F \neq f, \quad (5)$$

де  $F$  – пластичний потенціал, функція історії деформування;  $f$  – поверхня текучості, критерій переходу до пластичного стану;  $d\lambda$  – (скалярний коефіцієнт простого навантаження, обраховується в ході розв’язку пластичної задачі;

В якості критерію переходу ґрунту в пластичний стан роботи в розрахунковій моделі використано критерій текучості Мізеса-Шлейхера-Боткіна. Поверхня текучості  $f$  при описанні нелінійних властивостей ґрунтів дає співвідношення між I інваріантом тензора напружень  $\sigma_m$  та II інваріантом девіатора напружень  $T$  на октаедричній площині і разом з рівняннями рівноваги забезпечує кількість рівнянь і кількість невідомих для розв’язку задачі:

$$\begin{cases} f = T + \sigma_m \cdot \operatorname{tg}\psi - \tau_s & \text{при } \sigma_m \leq P_0 \\ f = T + P_0 \cdot \operatorname{tg}\psi - \tau_s & \text{при } \sigma_m > P_0 \end{cases} \quad (6)$$

де  $f$  – умова текучості,  $\sigma_m$  – гідростатичний тиск;  $T$  – інтенсивність девіатора напруг;  $\psi$ ,  $C$  – кут внутрішнього тертя та зчеплення на октаедричній площині;  $\tau_s$  – параметр на октаедричній площині, аналогічний зчепленню;  $P_0$  – параметр ґрунтового середовища, характеризує перехід від конуса до циліндра в критерії текучості Мізеса-Шлейхера-Боткіна.

Кут зсуву (внутрішнього тертя)  $\phi_m$  ґрунтової основи в моделі визначався за формулою:

$$\phi_m = \phi_f \pm \theta, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{d\varepsilon_v}{d\gamma} = \Lambda, \quad (7, 8)$$

$\phi_f$  – кут внутрішнього тертя ґрунту, додатковий параметр неасоційованої моделі пластичної течії,  $\Lambda$  – швидкість дилатансії, знаходиться за аналітичними залежностями від щільності ґрунту  $\rho$  і величини критичної щільності ґрунту  $\rho^{cr}$   $\Lambda = \Lambda(\rho, \rho^{cr})$ . [4, 6]. В розрахунку використано метод лінійних наближень за О. А. Ільюшиним [1,6] – покроковий ітераційний алгоритм навантаження способу розв’язку нелінійних задач, та дилатансійну модель пористих середовищ Ніколаєвського В.М., Бойка І.П. [4, 5], згідно якої зміна об’єму ґрунту може йти лише при дисипації механічної енергії.

Результати прогнозу поведінки під навантаженням буроін’єкційної палі  $L=8$  м., діаметром 0,42 м в лесових суглинках за числовим МГЕ подано на рис.1.

На рис. 2 для порівняння наведено експериментальний графік “навантаження – осідання” цієї ж самої буроін’єкційної палі та моделювання її поведінки за числовим методом скінчених елементів (МСЕ) згідно досліджень [3].

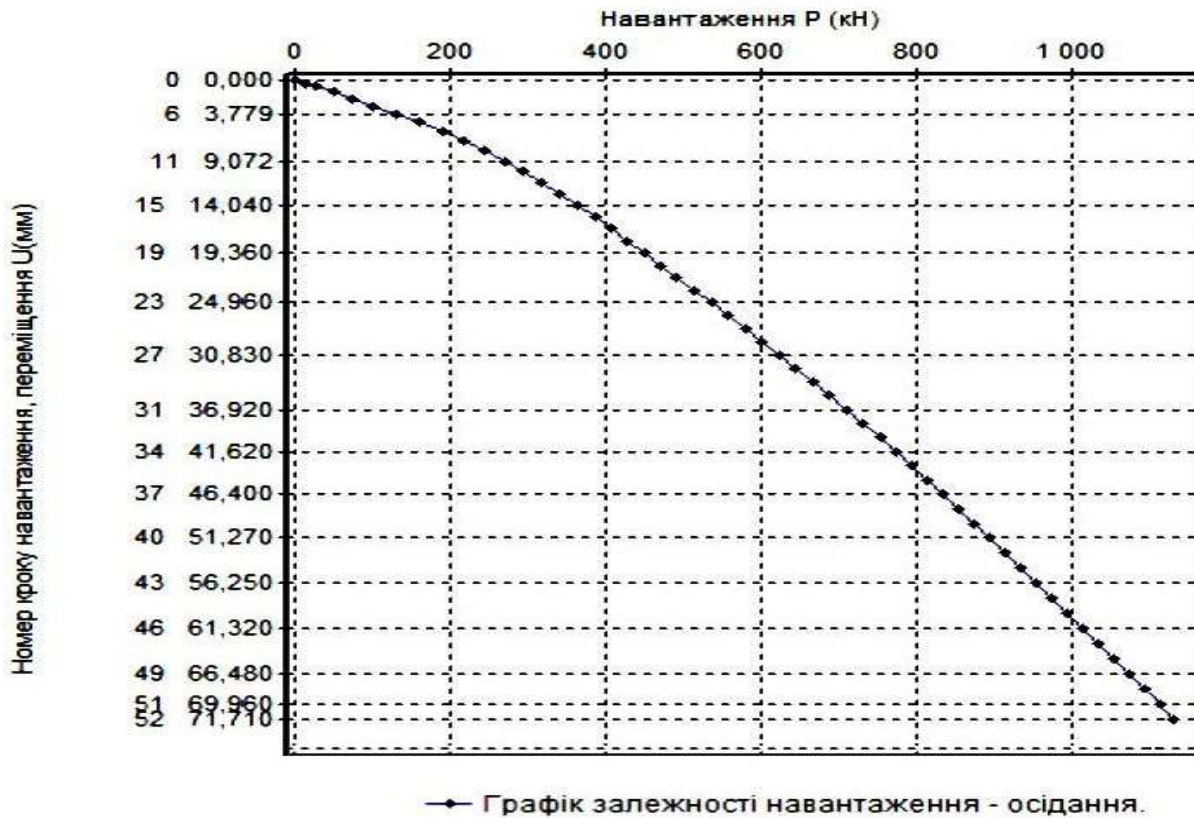


Рисунок 1 – Графік залежності навантаження-осідання згідно даних моделювання за МГЕ бурін'єкційної палі довжиною L= 8 м

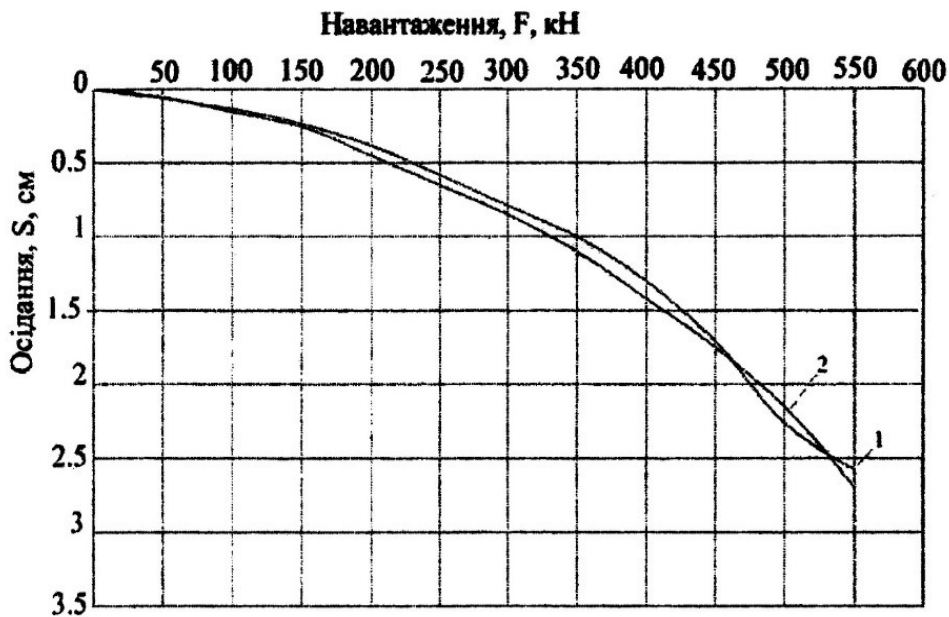


Рисунок 2 – Графіки залежності осідання бурін'єкційної палі від навантаження за МСЕ (графік 1) та даними статичних випробовувань (графік 2) згідно досліджень [3]

### Висновки

Згідно даних експериментальних досліджень та моделювання поведінки бурін'єкційної палі за методом скінчених елементів (МСЕ) [3] при осіданні  $s = 2$  см величина навантаження (несуча здатність палі) склала 485 кН. Моделювання за числовим методом граничних елементів при  $s = 2$  см величина навантажень  $P=472$  кН. Така відповідність даних підтверджує достовірність напрацьованої математичної моделі з залученням числового методу граничних елементів (МГЕ).

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. К. Бреббіа, Ж. Теллес, Л. Вроубел. Методи граничних елементів. 1987 р.
2. Brebbia K. Applications of MGE in engineering // K. Brebbia, S. Walker. -1982.
3. Левченко В.П. Напружено-деформований стан системи «буроін'єкційна паля - основа». Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня к.т.н. Полтавський національний технічний університет- 2011р.: Полтава, 2011 р.
4. Ніколасвський В. Н. Дилатансія та закони незворотнього деформування ґрунтів / В. Н. Ніколасвський // Зб. Основи, фундаменти та механіка ґрунтів. - 1979. - № 5. - С. 29-31.
5. Бойко І. П. Теоретичні основи проектування пальових фундаментів на пружньо-пластичні основи / І. П. Бойко // Зб. Основи та фундаменти. – К. : Будівельник, 1985. № 18. – С. 11–18.
6. Моргун А. С. Теорія пластичної течії в механіці ґрунтів // А. С. Моргун. – Вінниця : ВНТУ. – 2013 – 108 с.

## REFERENCES

1. K. Brebbia, Zh. Telles, L. Vroubel. Metody hranychnykh elementiv. 1987 r.
2. Brebbia K. Applications of MGE in engineering // K. Brebbia, S. Walker. -1982.
3. Levchenko V.P. Napruzhenno-deformovanyi stan systemy «buroin'iektiina palia - osnova». Avtoreferat dysertatsii na zdobuttia naukovooho stupenia k.t.n. Poltavskiyi natsionalnyi tekhnichnyi universytet - 2011r.: Poltava, 2011 r.
4. Nikolaievskiy V. N. Dilatansiya ta zakony nezvorn'oho deformuvannia hruntiv / V. N. Nikolaievskiy // Zb. Osnovy, fundamenty ta mekhanika hruntiv. - 1979. - № 5. - S. 29-31.
5. Boiko I. P. Teoretychni osnovy proektuvannia palovykh fundamentiv na pruzhn'o-plastychni osnovi / I. P. Boiko // Zb. Osnovy ta fundamenty. – K. : Budivelnik, 1985. № 18. – S. 11–18.
6. Morhun A. S. Teoriia plastychnoi techii v mekhanitsi hruntiv // A. S. Morhun. – Vinnytsia : VNTU. – 2013 – 108 s.

**Моргун Алла Серафимівна** – професор кафедри будівництва, міського господарства та архітектури; Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: [morgunallaS@gmail.com](mailto:morgunallaS@gmail.com)

**Тянь Чженфен** - аспірант ФБЦЕІ; Вінницький національний технічний університет, e-mail: [575138236@qq.com](mailto:575138236@qq.com).

**A. Morgun  
Tian Zhengfen**

## PREDICTION OF THE BEARING CAPACITY OF BORED INJECTION PILES USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

Vinnytsia National Technical University  
Parib Engineering Branch Jiuquan

*The article discusses the method for predicting the bearing capacity of bored injection piles constructed using the "Soletanche" technology, employing the Boundary Element Method (BEM). Considering that bored injection piles compact the soil during their installation, the study of the stress-strain state (SSS) of such structures is highly relevant.*

*The authors conducted mathematical modeling of the deformation process of a bored injection pile in loess clay, using solutions from an elastoplastic soil mechanics problem. The modeling was performed using an integral equation, which allows reducing the dimensionality of the problem. The main tool for calculations was the Mindlin solutions, which best corresponded to the physical nature of the problem.*

*The article also utilized a non-associated plastic flow rule to describe plastic deformations and the Mises-Schleicher-Botkin yield criterion. The authors presented a detailed step-by-step loading and problem-solving algorithm, considering the weighted average physical and geological characteristics of the soil.*

*The modeling results were compared with experimental data, confirming the validity of the proposed mathematical model. According to the obtained data, at a settlement of 2 cm, the bearing capacity of the pile using BEM was 472 kN, which closely correlates with the experimental results.*

*This research is of significant importance for the design of pile foundations, especially in conditions where complex geotechnical factors and nonlinear soil properties need to be considered.*

*Keywords: bored injection piles, Boundary Element Method (BEM), bearing capacity, stress-strain state (SSS), elastoplastic problem, mathematical modeling, "Soletanche" technology, plastic deformations, yield criterion, geotechnical conditions.*

**Alla Morgun** – Professor of the Department of Construction, Urban Economy, and Architecture; Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: [morgunallaS@gmail.com](mailto:morgunallaS@gmail.com)

**Tian Zhengfen** – PhD student at FBCI; Vinnytsia National Technical University, e-mail: [575138236@qq.com](mailto:575138236@qq.com)