

**КОМПОНУВАННЯ МАТРИЦІ ЖОРСТКОСТІ СТЕРЖНЕВОЇ СИСТЕМИ**

Моргун А. С., Сорока М. М., Задорожнюк В. О. Слободян Д. В.

*Науково-технічний процес в будівництві та викликана ним необхідність ознайомлення з новими ефективними методами розрахунку споруд і їх проектування спонукає до необхідності розуміння фізичної суті методів розрахунку. В статті викладено основи формування матриці переходу від деформацій до напружень в стержневих системах. Розглянуто різні граничні умови закріплення стержнів та на основі цих варіантів наведено конкретний числовий розрахунок епюри внутрішніх зусиль згинальних моментів.*

**Ключові слова:** пружність, матриця жорсткості, матриця перетворень, напружено-деформований стан, метод скінчених елементів.

**КОМПОНОВКА МАТРИЦЫ ЖОРСТКОСТИ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ**

Моргун А. С., Сорока М. М., Задорожнюк В. О. Слободян Д. В.

*Научно-технический прогресс в строительстве и вызванная им необходимость ознакомления с новыми эффективными методами расчета сооружений и их проектирования приводит к необходимости понимания физической сути методов расчета. В статье изложены основы формирования матрицы перехода от деформаций к напряжениям в стержневых системах. Рассмотрены разные граничные условия закрепления стержней и на основании этих вариантов приводится конкретный числовой расчет эпюры внутренних усилий изгибающих моментов.*

**Ключевые слова:** упругость, матрица жорсткості, матрица преобразований, напряженно-деформированное состояние, метод конечных элементов.

**THE LAYOUT OF THE STIFFNESS MATRIX ROD SYSTEM**

Morgun A., Soroka M., Zadorozhnyuk V., Slobodyan D.

*Scientific and technological progress in the construction and the resulting need to consult with new efficient methods of analysis of structures and their design leads to the need to understand the physical nature of the methods of calculation. The article outlines the basis for the formation of the transition matrix from the strains to stresses in the core systems. Considered different boundary conditions fixing rods and on the basis of these options provides a specific numerical calculation of internal forces diagrams of bending moments.*

**Keywords:** elasticity, stiffness matrix, the matrix transformation, the stress-strain state of the finite element method.

**Вступ.** Розрахунок споруд на міцність є основною задачею їх проектування, саме тому питання нових ефективних методів розрахунку є актуальним для сьогодення. Перед кожним проектантом стоїть задача – отримати розв’язок важливої практичної задачі з найменшими затратами та наперед завданою точністю. Як теоретичний так і практичний напрямок рішення задачі можна відслідкувати на одному із найбільш розповсюджених на тепер методі скінчених елементів (МСЕ). МСЕ базується на розгляді конструкцій у вигляді сукупності окремих конструктивних елементів, з’єднаних у кінцевому числі вузлових точок.

За умови розгляду МСЕ у формі методу переміщень вузлам розрахункової схеми надаються додаткові зв’язки в яких виникають реакції (реактивні моменти та реактивні сили).

**Постановка задачі.** Матриця жорсткості  $[K]$  характеризує пружні властивості СЕ. До вузлів дискретної моделі відносяться точки поєднання стержнів, місця зміни жорсткості стержня, чи зміни величини інтенсивності розподіленого навантаження, точки прикладання зосереджених сил чи моментів, опорні вузли. Загальний метод побудови матриць жорсткості будь-яких елементів ґрунтується на розгляді функціоналу повної потенціальної енергії та умов його

мінімуму.

**Результати досліджень.** Найпростіший підхід, при якому коефіцієнти матриці визначають із розрахунку стержня на почергове змушене переміщення його кінців.

Матриця жорсткості дискретної моделі є квадратною матрицею та має розмірність  $(n \times n)$ , де  $n$  – число ступенів вільності. Елементи матриці  $[K]$  – це величини вузлових реакцій, що обумовлені одиничними вузовими переміщеннями. Для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості необхідно почергово надавати одиничні переміщення вузам дискретної моделі і знаходити зусилля, які при цьому виникатимуть у вузлах. Вигляд матриці жорсткості залежить від граничних умов на кінцях стержня. Лінійна компонента деформацій, лінійне подовження стержня  $\delta_1^1, \delta_4^2$  (рис. 1) за умови пружної роботи стержня рівне  $EA/l$  і

$$\delta_1^1 = \delta_4^2 = NI / EA, \quad (1)$$

а компоненти жорсткості I, IV стовпчика матриці  $[K]$  рівні  $EA/l$ .

Для обчислення елементів II стовпчика матриці  $[K]$  надається дискретній моделі на рис.1, яка має по 3 невідомих переміщень в кожному вузлі (тобто 6 степенів вільності) примусове вузлове переміщення  $\Delta_2 = 1$ , вважаючи, що всі інші переміщення вузлів дорівнюють нулю.

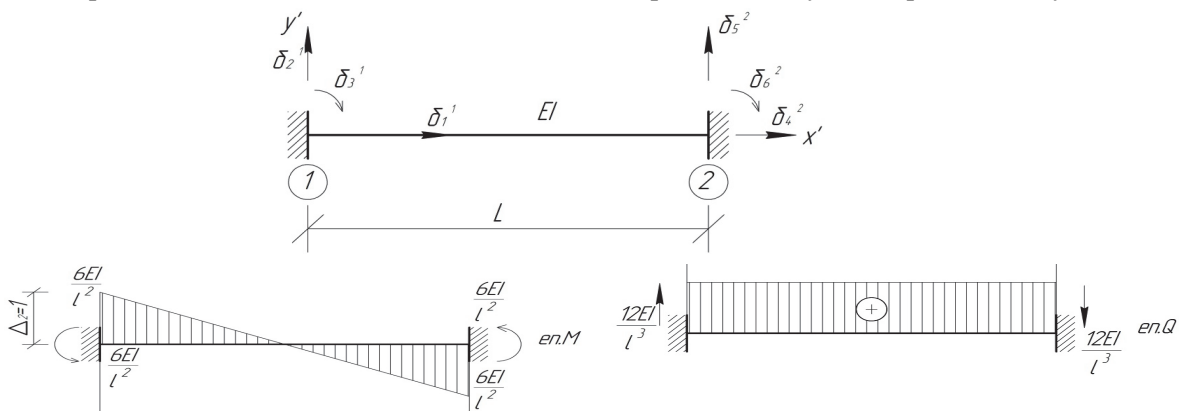
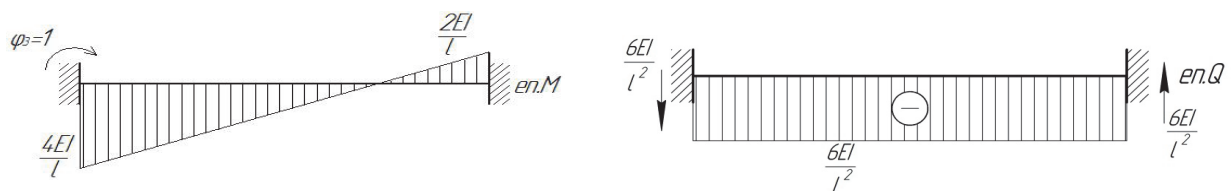
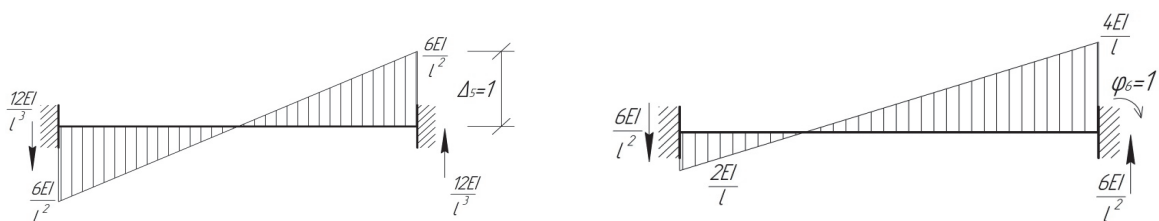


Рисунок 1 – Схема вузлових переміщень з двох сторін закріпленого стержня та  $e_n.M$  і  $e_n.Q$

Для визначення елементів III стовпця  $[K]$  надамо вузлу 1 примусовий одиничний поворот, вважаючи що всі інші вузли не переміщуються.



Для знаходження V та VI стовпців  $[K]$  надамо вузлу 2 примусові переміщення  $\Delta_5 = 1$  та  $\phi_6 = 1$ .



Знайдені зусилля (згинальні моменти та поперечні сили) складуть величини вузлових реакцій, вони і будуть відповідними коефіцієнтами матриці жорсткості  $[K]$  для жорстко закріпленого стержня на рис.1.

$$[K] = \begin{pmatrix} EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EA/l^3 & -6EA/l^2 & 0 & -12EA/l^3 & -6EA/l^2 \\ 0 & -6EA/l^2 & 4EA/l & 0 & 6EA/l^2 & 2EA/l \\ -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EA/l^3 & 6EA/l^2 & 0 & 12EA/l^3 & 6EA/l^2 \\ 0 & -6EA/l^2 & 2EA/l & 0 & 6EA/l^2 & 4EA/l \end{pmatrix} \quad (2)$$

Для стержня на рис. 2 надамо почергово одиничні лінійні та кутові вимушені зміщення вузлам стержня та визначимо зусилля.

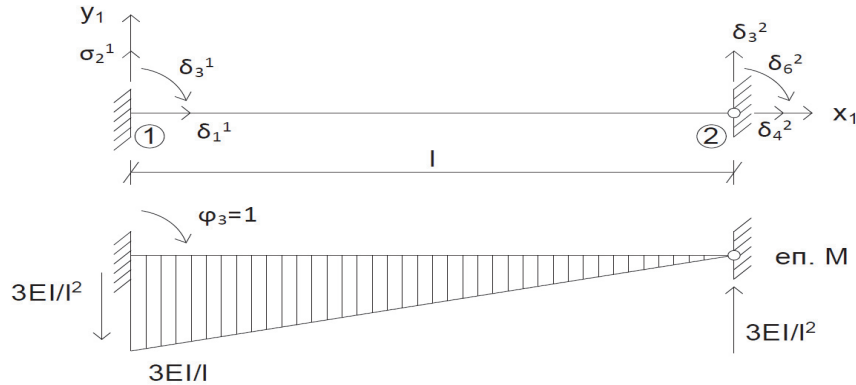


Рисунок 2 – Стержень жорстко закріплений з однієї сторони та шарнірно опертий з другої

$$[K] = \begin{pmatrix} EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 3EA/l^3 & -3EA/l^2 & 0 & -3EA/l^3 & 0 \\ 0 & -3EA/l^2 & 3EA/l & 0 & 3EA/l^2 & 0 \\ -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -3EA/l^3 & -3EA/l^2 & 0 & 3EA/l^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

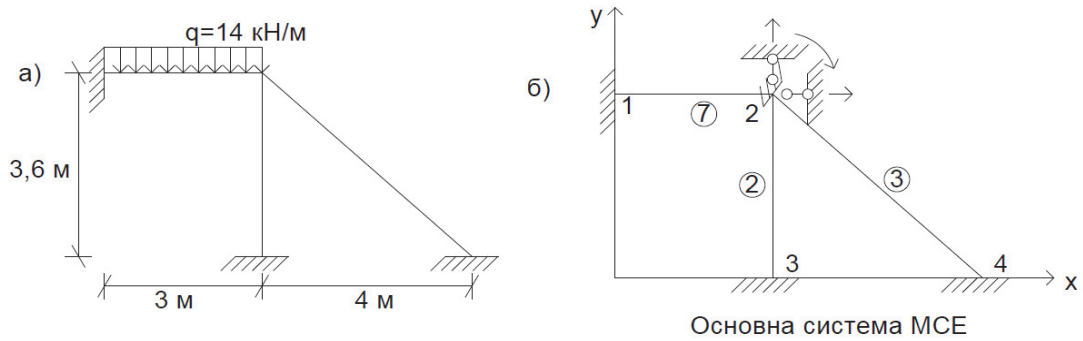
Таким чином, матриця жорсткості стержня в локальній системі координат визначає величини кінцевих реакцій, які орієнтовані за осями локальної системи координат.

При розгляді сумарної дії стержнів на вузли дискретної моделі виникає необхідність привести ці всі реакції до спільних напрямів (тобто до глобальної системи координат). В цьому випадку до кожного стержня призначається матриця перетворень:

$$[T] = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

де  $\beta$  – кут між напрямом осі X в глобальній системі координат і напрямком X в місцевій системі координат.

Для розрахункової схеми рами на рис.3 з урахуванням викладених положень визначимо внутрішні зусилля згинальних моментів.  $EI=2000 \text{ кН } M^2$ ,  $EA=600000 \text{ кН}$ .



Матриця жорсткості для першого стержня згідно (2) та вектор вузлового навантаження в місцевій системі координат (навантаження, прикладене до стержня, зосереджуємо в вузлах):

$$[K']_1 = \begin{bmatrix} 200000 & 0 & 0 & -200000 & 0 & 0 \\ 0 & 889 & -1333 & 0 & -888 & -1333 \\ 0 & -1333 & 2667 & 0 & 1333 & 1333 \\ -200000 & 0 & 0 & 200000 & 0 & 0 \\ 0 & -888 & 1333 & 0 & 889 & 1333 \\ 0 & -1333 & 1333 & 0 & -889 & 2667 \end{bmatrix}; \quad \{p'\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 21 \\ -10.5 \\ 0 \\ 21 \\ 10.5 \end{Bmatrix}$$

Матриця жорсткості для другого стержня згідно (2), вектор вузлового навантаження нульовий, оскільки стержень не навантажений:

$$[K']_2 = \begin{bmatrix} 166667 & 0 & 0 & -166667 & 0 & 0 \\ 0 & 514 & -926 & 0 & -514 & -926 \\ 0 & -926 & 2222 & 0 & 926 & 1111 \\ -166667 & 0 & 0 & 166667 & 0 & 0 \\ 0 & -514 & 926 & 0 & 514 & 926 \\ 0 & -926 & 1111 & 0 & 926 & 2222 \end{bmatrix}; \quad \{p'\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Матриця жорсткості для третього стержня згідно (2), вектор вузлового навантаження нульовий, оскільки стержень теж ненавантажений:

$$[K']_3 = \begin{bmatrix} 111494 & 0 & 0 & -111494 & 0 & 0 \\ 0 & 154 & -414 & 0 & -154 & -414 \\ 0 & -414 & 1487 & 0 & 414 & 743 \\ -111494 & 0 & 0 & 111494 & 0 & 0 \\ 0 & -154 & 414 & 0 & 154 & 414 \\ 0 & -414 & 743 & 0 & 414 & 1487 \end{bmatrix}; \quad \{p'\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Матрицю перетворень (4) для стержня 1 не записуємо, оскільки місцева та глобальна система координат співпадають.

Для стержня № 2  $\beta_2 = 270^\circ$ ,  $\sin \beta_2 = -1$ ,  $\cos \beta_2 = 0$  та для стержня № 3  $\sin \beta_3 = -0.669$ ,  $\cos \beta_3 = 0.743$  матриці перетворень матимуть вигляд:

$$[T]_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [T]_3 = \begin{bmatrix} 0.73 & -0.67 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.67 & 0.74 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.74 & -0.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.67 & 0.74 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матриця жорсткості в загальній системі координат для вузла 2 та вектор навантажень для вузла 2:

$$\begin{bmatrix} 262182 & -55362 & -1203 \\ -55362 & 217535 & 1025 \\ -1203 & -1197 & 6375 \end{bmatrix}; \quad \{p\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 21 \\ 10.5 \end{Bmatrix}.$$

Система рівнянь рівноваги для вузла 2:

$$[k] \cdot \{\Delta\} + \{p\} = 0. \quad (5)$$

Розв'язок системи (5) дає вектор переміщень вузла 2:

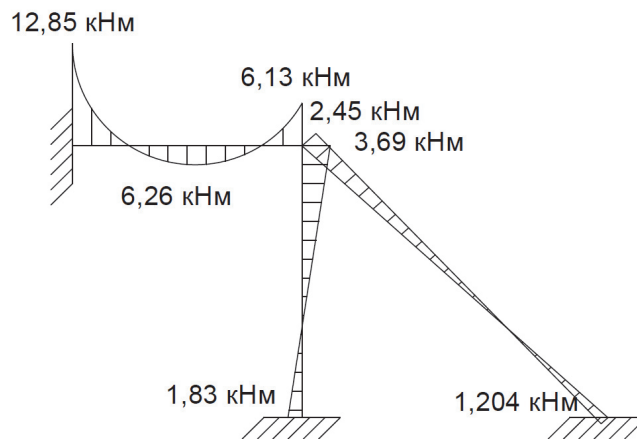
$$\{\Delta\} = -[K]^{-1} \cdot \{p\} = \begin{pmatrix} -2.79 E - 05 \\ -9.58 E - 05 \\ -1.67 E - 03 \end{pmatrix}$$

(6)

Вузлові зусилля в стержнях в місцевій системі координат визначаються за формулою

$$\{r\} = [K'] \cdot [T] \cdot \{\delta\} + \{p'\}. \quad (7)$$

Обрахована згідно наведеного алгоритму еп. М плоскої рами (рис. 3) подана на рис. 4.



еп. М

### Висновки

- Розглянуті положення є основою сучасного числового МСЕ, який узагальнює будівельну механіку стержневих систем на континуальні системи та дає можливість отримувати їх напружено-деформований стан.

### Використана література

- 1 Моргун А. С., Сорока М. М. Будівельна механіка та будівельні конструкції. Вінниця, ВНТУ. 2010. – 243 с.
- 2 Баженов В.А., Дашенко О. Ф., Коломієць Л. В., Сур'янінов М. Г., Ухов О. В. Будівельна механіка та будівельні конструкції. Одеса: «СтандартЪ», 2010. – 587 с.

**Моргун Алла Серафимівна** – д.т.н., професор, завідувач кафедри промислового та цивільного будівництва Вінницького національного технічного університету.

**Сорока Микола Миколайович** – к.т.н., доцент кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури.

**Задорожнюк Віолета Олегівна** – студент Вінницького національного технічного університету.

**Слободян Дарина Володимирівна** – студент Вінницького національного технічного університету.

**Моргун Алла Серафимовна** – д.т.н., профессор, заведующая кафедры промышленного и гражданского строительства Винницкого национального технического университета.

**Сорока Николай Николаевич** – к.т.н., доцент кафедры строительной механики Одесской государственной академии строительства и архитектуры.

**Задорожнюк Виолета Олеговна** – студент Винницкого национального технического университета.

**Слободян Дарья Владимировна** – студент Винницкого национального технического университета.

**Morgun Alla** – doctor of technical sciences, professor, head of department of industrial and civil engineering Vinnytsia National Technical Universiti.

**Soroka Nik** – ph. d., docent of department of bilding mehanik Odessa state academy of civil engineering and architecture.

**Zadorognyk Viola** – student Vinnytsia National Technical Universiti.

**Slobodan Dasha** – student Vinnytsia National Technical Universiti.